Микола Яременко

Квазілінійні диференціальні рівняння і системи еліптичного типу в дивергентній формі, умови гладкості розв'язку

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: math.kiev@gmail.com

Встановлено нові умови на коефіцієнти квазілінійного диференціального рівняння еліптичного типу в дивергентній формі – розглянуто класи сингулярних коефіцієнтів подібні до тих, які були раніше запропоновані у лінійному випадку Д. Нешом, Ю.А. Семеновим, В.Ф. Коваленко, П.Д. Мілманом (в додатку детально вивчається лінійний випадок). Розглядається квазілінійне диференціальне рівняння еліптичного типу в дивергентній формі, в усьому евклідовому просторі R^l, вигляду:

$$- \sum_{i,j=1,\ldots,l} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,u) \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + \lambda u + b(x,u,\nabla u) = f, \qquad (1)$$

де невідомою є функція $u(x)$, $\lambda > 0$ – дійсне число, яке умовно можна назвати «спектральним параметром», і $f(x)$ – задана функція векторного аргументу. Тут $b(x,u,\nabla u)$ – функція трьох змінних: вектора розмірності l, функції $u(x)$, вектора довжини l. Вимірна матриця $a_{ij}(x,u)$ розмірності $l \times l$ задовольняє умову еліптичності: $\exists \nu : 0 < \nu < \infty$ і виконується нерівність $\nu \mathrm{I} \leq a(x,u)$ для майже всіх $x \in R^l$, тобто $\nu \sum_{i=1}^{l} \xi_i^2 \leq \sum_{ij=1,\ldots,l} a_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j \quad \forall \xi \in R^l$. Основні умови записуються у вигляді:

1) $b(x,y,z)$ є вимірною функцією своїх аргументів і $b \in L^1_{loc}(R^l)$;

2) функція $b(x,y,z)$ майже скрізь задовольняє нерівності:

$$|b(x,u,\nabla u)| \leq \mu_1(x)\,|\nabla u| + \mu_2(x)\,|u| + \mu_3(x).$$

В цій умові функції $\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$.

3) приріст функції $b(x,y,z)$ майже скрізь задовольняє умову:

$$|b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v)| \leq \mu_4(x)\,|\nabla(u-v)| + \mu_5(x)\,|u-v|\,,$$

де $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$.

[1] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 735 с.

[2] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М: Мир, 1972. – 587 с.

[3] Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя / О.А. Олейник, В.Н. Самохин. – М.: Физматлит, 1997. – 512 с.

[4] Семенов Ю.А. Гладкость обобщенных решений уравнения с непрерывными коэффициентами / Ю.А. Семенов // Мат. сб. – 1982. – Т.118, №3. – С. 399 – 410.