Богдан Шувар [1], Михайло Копач [2], Анатолій Обшта [1]

Про один клас операторних рівнянь в банахових просторах з конусом

[1] *Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна*
[2] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна*
E-mail: kopachm2009@gmail.com

В [1, 2] встановлено умови однозначної розв'язності рівняння

$$x = Fx \tag{1}$$

з інтегральним оператором $Fx = f(t)+\int_0^1 k(t,s)x^{\alpha}(s)ds$, де $\alpha \in (0,1)$. В цьому повідомленні на основі відповідних результатів із [3, стор. 36-44] та [4, стор. 267-291] сформулюємо твердження про існування нерухомої точки оператора $F : E \to E$, для якого існує таке число $M > 0$, коли при $x \in E$, $\|x\| \geq M$ матимемо

$$\|Fx\| \leq \alpha\|x\|, \quad (\alpha \in (0;1)), \tag{2}$$

де E – банахів простір. Будемо вважати, що цей простір є цілком правильно напівупорядкованим і структурою.

Теорема 1 *Нехай оператор F є ізотонним і заданим є такий елемент $u \in E$ ($v \in E$), що $u \leq Fu$ ($v \geq Fu$). Тоді існує розв'язок $y^* \in E$ ($z^* \in E$), до якого монотонно не спадаючи (не зростаючи) збігається послідовність (y_n) ((z_n)), побудована за формулами*

$$y_0 = u \ (z_0 = v), \quad y_{n+1} = Fy_n \ (z_{n+1} = Fz_n), \tag{3}$$

причому маємо $u \leq y^*$ ($v \geq z^*$). Якщо, крім того, справджується нерівність $u \leq v$, то y^* є нижнім, а z^* є верхнім розв'язками рівняння (1) на відрізку $[u,v]$. За додаткового припущення, що $p \leq q$, $(p,q \in E)$, маємо умову $Fq-Fp \leq L_1(q-p)$ з неперервним додатнім оператором $L_1 : E \to E$ і що оператор $I - L_1$ є додатнім (I – одиничний оператор), причому з нерівностей $(I-L_1)w \leq \theta$, $w \geq \theta$ (θ – нульовий елемент в E) випливає, що $w = \theta$. Тоді рівняння (1) має єдиний на відрізку $[u,v]$ розв'язок x^*, який є точкою неперервності оператора F, а також справджуються нерівності

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,1,\ldots). \tag{4}$$

Теорема 2 *Нехай: 1) оператор F є антитонним; 2) задані елементи $u, v \in E$, для яких маємо $u \leq Fv$, $v \geq Fu$; 3) існує таке число $M > 0$, що при $(\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}} \geq M$ $(y, z \in E)$ будемо мати . Тоді система рівнянь $y = Fz$, $z = Fy$ в деякій області $D \in E$ має розв'язок (y^*, z^*) і збігаються до y^* та z^* послідовності (y_n) та (z_n), відповідно, утворені за допомогою формул $y_{n+1} = Fz_n$, $z_{n+1} = Fy_n$ $(y_0 = u,\ z_0 = v)$. Нехай, крім того, $u \leq v$ і справджується умова $Fq - Fp \geq -L_2(q - p)$ з лінійним неперервним додатнім оператором L_2, а також додатнім є оператор $I - L_2$ і з нерівностей $(I - L_2)w \leq \theta$, $w \geq \theta$ випливає рівність $w = \theta$. Тоді рівняння* (1) *має єдиний на відрізку $[u, v]$ розв'язок x^*, який є точкою неперервності оператора F, і справджуються нерівності* (4).

[1] Дубровский В.М. *Системы нелинейных интегральных уравнений*, Успехи математических наук **4 (2)**, (1949), сс. 170-177.

[2] Красносельский М. А. *Некоторые задачи нелинейного анализа*, Успехи математических наук **9 (2)**, (1954), сс. 57-114.

[3] Курпель Н.С., Шувар Б.А. *Двусторонние операторные неравенства и их применения*, Наукова думка, Киев, 1980.

[4] Шувар Б. А., Копач М. І., Ментинський С. М., Обшта А. Ф. *Двосторонні наближені методи*, В-во Прикарпатського нац. ун-ту ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ, 2007.