Володимир Маслюченко, Василь Мельник

# Існування проміжної нескінченно диференційовної функції на паралелепіпедах в $\mathbb{R}^n$

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
*E-mail: mathan@ukr.net, windchange7@gmail.com*

Теорема Гана про існування проміжної неперервної функції [1], яка дістала розвиток у серії праць [2, 3, 4], останнім часом породила різні аналоги про існування проміжних монотонних [5] і опуклих [6] функцій. Тут ми подамо теорему про існування проміжної нескінченно диференційовної функції на паралелепіпедах в $\mathbb{R}^n$.

Вихідним є таке просте спостереження:

*Лема 1.* Нехай $X$ – топологічний простір, $g, h : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервні зверху і знизу в точці $x_0$ відповідно функції, такі, що $g(x_0) < h(x_0)$, і $g(x_0) < \gamma < h(x_0)$. Тоді існує такий окіл $U$ точки $x_0$ в $X$, що $g(x) < \gamma < h(x)$ на $U$.

Крім того, ми використовуємо такий результат:

*Лема 2.* Нехай $Q = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \times ... \times (\alpha_n, \beta_n)$ — відкритий паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$. Тоді існує нескінченно диференційовна функція $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, у якої носій $\mathrm{supp}\varphi = Q$.

Використовуючи леми 1 і 2 та компактність замкненого паралелепіпеда, ми отримуємо такий результат:

**Теорема 1** *Нехай $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ – замкнений паралелепіпед в $\mathbb{R}^n$, $g, h : P \to \mathbb{R}$ – напівнеперервні відповідно зверху і знизу функції, такі, що $g(x) < h(x)$ на $P$. Тоді існують скінченна послідовність нескінченно диференційовних функцій $\varphi_j : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, $j = 1, ..., m$ і послідовність чисел $\gamma_1, ..., \gamma_m$, такі, що сума $\sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$ на $P$ і $g(x) < \gamma_j < h(x)$ на носії $supp\varphi_j$ при $j = 1, ..., m$. При цьому функція $f = \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j \varphi_j$ буде нескінченно диференційовною, і для неї $g(x) < f(x) < h(x)$ на $P$.*

[1] Hahn H. *Uber halbstetige und unstetige Functionen* // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien.Math.-naturwiss.Kl.Abt.IIa. – 1917. – **126**. – S. 91-110.

[2] Tong H. *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces* // Duke Math. J. – 1952. – **19**. – P. 289-292.

[3] Katetov M. *On real-valued functions in topological spaces* // Fund. Math. – 1952. – **38**. – P. 85-91.

[4] Dowker C.H. *On countably paracompact spaces* // Canad. J. Math. – 1951. – **3**. – P. 219-224.

[5] Маслюченко В.К., Петей С.П. *Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації* // Бук. мат. журн. – 2015. – **3**, №2. – С. 64-71.

[6] Маслюченко В.К., Мельник В.С. *Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій* // Бук. мат. журн. – 2016. – **4**, №1-2. – С. 110-116.