Галина Лопушанська, Віталія Шумська

Обернена задача Коші для телеграфного рівняння з дробовими похідними та узагальненими функціями

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: lhp@ukr.net, vrapita@gmail.com

Нехай $Q = \mathrm{R}^n \times (0,T]$, $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями в R^n, $\mathcal{E}(\mathrm{R}^n) = C^\infty(\mathrm{R}^n)$, $\mathcal{D}(\bar{Q})$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями за просторовими змінними і таких, що $(\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0$, $k \in \mathrm{Z}_+$, штрихами позначаємо простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на відповідних просторах основних функцій,

$\mathcal{D}'_C(Q) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot,t), \varphi(\cdot)) \in C(0,T] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)\}$,

де $(v(\cdot,t), \varphi(\cdot))$ – значення узагальненої функції v на основній функції φ для кожного $t \in [0,T]$.

Вивчаємо обернену задачу

$$u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u = F_0(x)g(t), \ \ (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \ \ u_t(x,0) = F_2(x), \ x \in \mathrm{R}^n, \tag{2}$$

$$\big(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big) = F(t), \ \ t \in (0,T] \tag{3}$$

на визначення $(u,r) \in \mathcal{D}'_C(Q) \times C(0,T]$ для рівняння з дробовими похідними Рімана – Ліувілля порядків $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in (0,1)$, $(-\Delta)^{\gamma/2}u$ визначено за допомогою перетворення Фур'є $F[(-\Delta)^{\gamma/2}u] = |\lambda|^\gamma F[u]$ та $\gamma > \alpha$, $\min\{n,2,\gamma\} > (n-1)/2$.

Застосовуючи метод функції Гріна, за припущень

$F_j \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, $j = 0,1,2$, $F, F^{(\beta)} \in C[0,T]$,
$t^\varepsilon g(t)$ та $t^\varepsilon F^{(\alpha)}(t)$ неперервні на $[0,T]$ при деякому $\varepsilon \in (0,(\alpha-\beta)/2)$,
$F^{(\beta)}(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$

доводимо існування числа $T^* \in (0,T]$ (відповідно $Q^* = \mathrm{R}^n \times (0,T^*]$) та розв'язку $(u,r) \in \mathcal{D}'_C(Q^*) \times C(0,T^*]$ задачі (1)-(3). Для єдиності розв'язку задачі на Q достатньо, щоб $F^{(\beta)}(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$.