Іван Клевчук

Біфуркація циклів параболічних систем із запізненням та малою дифузією

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: klevchuk@yandex.ru

Розглядається рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u} \qquad (1)$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \qquad (2)$$

де ε – малий додатний параметр.

Теорема. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки*

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon),$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова $(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2$ при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Цю теорему можна застосувати до дослідження біфуркації циклів параболічної системи із запізненням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon)u_t + f(u_t, \varepsilon) \qquad (3)$$

та періодичною умовою (2). Тут ε – малий додатний параметр, $L(\varepsilon) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^m$ – лінійний неперервний оператор, $f : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^m$, $f(\varphi, \varepsilon) = O(||\varphi||^2)$ при $||\varphi|| \to 0$, оператор f чотири рази неперервно диференційовний відносно своїх аргументів, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних функцій із значеннями в $\mathbb{R}^m$ з нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{-\Delta \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$, u_t – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $u_t(\theta, x) = u(t + \theta, x)$, $-\Delta \le \theta \le 0$. Припускається, що нульовий розв'язок системи (3) при $\varepsilon = 0$ асимптотично стійкий. Накладено умови на матрицю D та оператор $L(\varepsilon)$.