Володимир Ільків

Задача з умовами типу моментів для строго гіперболічного рівняння

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
E-mail: ilkivv@i.ua

У циліндрі $\mathcal{Q}_T$, що є добутком $[0,T]$ і p-вимірного тора Ω^p, розглядається задача з нелокальними інтегральними умовами типу моментів для строго гіперболічного рівняння

$$L(\partial_t,\partial_x)u=\partial_t^n u+\sum_{j=1}^{n}A_j(\partial_x)\partial_t^{n-j}u=0, \tag{1}$$

$$\mathcal{M}_j(u)\equiv\int_0^T m_j(t)u(t,\cdot)\,dt=\varphi_j, \qquad j=1,\dots,n, \tag{2}$$

де позначено $A_j(\partial_x)=\sum\limits_{|s|\le j}a_{js}\partial_x^s$, $\partial_x^s=\partial_{x_1}^{s_1}\cdots\partial_{x_p}^{s_p}$, $\partial_x=(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_p})$, $\partial_{x_j}=\partial/\partial x_j$, $\partial_t=\partial/\partial t$, моментні функції $m_j=m_j(t)\in\mathbf{C}^n[0,T]$, коефіцієнти a_{js} — комплексні числа, число T належить відрізку $[T_0,T_1]$ з додатної півосі, p — натуральне число.

Задача (1), (2) є, взагалі, некоректною за Адамаром у соболєвській шкалі просторів $\mathbf{H}_q=\mathbf{H}_q(\Omega^p)$, $q\in\mathbb{R}$, періодичних за змінною $x=(x_1,\dots,x_p)$ функцій, а також інших ширших шкалах, і пов'язана з проблемою *малих знаменників*, що розв'язується за допомогою метричного підходу до діофантових наближень у теорії чисел. Важливо знайти відповідні функції $m_1,\dots,m_n$ в умовах (2), що забезпечують коректність задачі, що й встановлено у роботі.

Нехай $\mathcal{W}_t[f_1,\dots,f_n]$ — матриця Вронського $\bigl(f_j^{(i)}(t)\bigr)_{i,j=1,\dots,n}$, простір $\mathbf{H}_q^n=\mathbf{H}_q^n(\mathcal{Q}_T)$ містить такі функції v, що $\partial_t^j v\in\mathbf{C}([0,T];\mathbf{H}_{q-j})$, а норма вводиться формулою $\|v;\mathbf{H}_q^n\|^2=\sum_{j=0}^n\|\partial_t^j v;\mathbf{C}([0,T];\mathbf{H}_q^{q-j}\|^2$.

Теорема 1 *Нехай $\mathcal{W}_0[m_1,\dots,m_n]=0$, $\det\mathcal{W}_T[m_1,\dots,m_n]\neq0$ для $T\in[T_0,T_1]$, а $A_n(\partial_x)$ — еліптичний вираз, тоді для довільного числа $T\in[T_0,T_1]\setminus\mathcal{T}$, де $\mathcal{T}$ — скінченна множина, існує для довільних φ_j з простору $\mathbf{H}_{q+n}$ єдиний розв'язок задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n$, якщо ж $T\in\mathcal{T}$, задача може мати лише скінченновимірне ядро (з тригонометричних многочленів), розмірність якого залежать тільки від порядку рівняння n, коефіцієнтів a_{js} і чисел T_0 та T_1.*