Володимир Гоцуленко

Розривні і хаотичні автоколивальні розв'язки хвильового рівняння

Інститут технічної теплофізики НАН України, Київ, Україна
E-mail: gosul@ukr.net

Виникнення розривних (релаксаційних) автоколивальних розв'язків дисипативних динамічних систем зазвичай асоціюється з вивченням їх асимптотик при $\varepsilon \to 0$, де малий параметр $\varepsilon > 0$ знаходиться множником при головній похідній. Класичним таким прикладом є добре відома система рівнянь осцилятора Ван дер Поля [1]. Однак збудження розривних автоколивань в дисипативній динамічній системі може відбуватися і при відсутності постійного малого параметра $\varepsilon > 0$. В [2] розглядалися умови виникнення розривних періодичних автоколивань в сингулярно збурених динамічних системах на площині.

В даній роботі розглядаються умови виникнення розривних періодичних або хаотичних автоколивань в хвильовому рівнянні

$$u_{xx}(x,t) = a^2 u_{tt} \ \forall (x,t) \in \Omega = (0;\ell) \times \mathbb{R}, \ \ (a = \mathrm{const}) \tag{1}$$

яке доповнюється граничними умовами:

$$u(0,t) = 0; \ \int\limits_0^\ell u_t(x,t)\,dx = \Psi\left[u(\ell,t)\right]. \tag{2}$$

Добре відомо, що автоколивання від початкових умов не залежать (принаймні в досить малої околиці відповідного граничного циклу). Тому надалі ми їх явно не конкретизуємо. Також зазначимо, що хвильове рівняння з нульовими граничними умовами є консервативною системою. Завдяки саме граничній умові при $x = \ell$ дана динамічна система є дисипативною. Надалі розв'язки задачі (1) – (2) розуміються в слабкому сенсі як елементи простору $L^\infty(\Omega)$.

Визначення. Функцію $u \in L^\infty(\Omega)$ будемо називати слабким розв'язком задачі (1) – (2), якщо виконуються варіаційні рівності:

$$\iint\limits_\Omega u(x,t)\left[\varphi_{xx}(x,t) - a^2\varphi_{tt}(x,t)\right]dxdt = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\iint\limits_{\Omega} u\,(x,t)\,\psi'\,(t)dxdt = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi\,[u\,(\ell,t)]\psi\,(t)\,dt\ \forall\psi \in C_0^{\infty}\,(R)\,.$$

Теорема. Введемо до розгляду відображення

$$Y = \mathcal{F}\,[X] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{3}$$

яке задається параметрично

$$Y = \frac{a^{-1}\Psi\,[u] - u}{2},\ X = \frac{a^{-1}\Psi\,[u] + u}{2}\ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Тоді будь який стійкий m – цикл $(m > 1)$ даного відображення

$$\mathcal{C}_m\left\{F_1^{\infty}, F_2^{\infty} = \mathcal{F}\,(F_1^{\infty})\,, ..., F_{m-1}^{\infty} = \mathcal{F}\left(F_{m-2}^{\infty}\right), F_m^{\infty} = \mathcal{F}\,(F_1^{\infty})\right\}$$

породжує орбітально асимптотично стійкий періодичний розв'язок задачі (1)-(2), який визначається співвідношенням

$$u\,(x,t) = F\,(t - ax) - F\,(t + ax)\,, \tag{4}$$

де функція F являється mT – періодичною і задається рівністю

$$F\,(t) = \sum_{k=0}^{m-1} F_{k+1}^{\infty}\chi_{[kT;(k+1)T)}\,(t)\ \text{ при } 0 \le t < mT,\ \ (T = 2a\ell)\,.$$

У випадку, коли відображення (3) має сингулярний хаотичний атрактор, наприклад атрактор Фейгенбаума, то він породжує хаотичний автоколивальний розв'язок задачі (1) – (2).

Відомо, що атрактор Фейгенбаума Φ одержується в результаті нескінченої серії біфуркацій подвоєння періоду циклів $\mathcal{C}_{2^m}$ при $m \to \infty$. Відповідна послідовність періодичних функцій $\{F_{2^m}\,(t)\}_{m=1}^{\infty}$ має граничну функцію F_{Φ} в просторі $L^{\infty}\,(\mathbb{R})$. Підставляючи дану функцію в співвідношення (4) одержується представлення для відповідного хаотичного атоколивального розв'язку задачі (1) – (2).

[1] Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. *Основы теории колебаний*, Наука, Москва, 1978.

[2] Гоцуленко В.В., *Автоколебания в неявно сингулярно возмущенных динамических системах на плоскости*, Нелинейная динамика **10 (2)**, (2014), С. 157-175.