

В'ячеслав Герасимов, Сергій Гефтер, Анастасія Рибалко

Неявне лінійне неоднорідне функціональне рівняння з оператором Помм'є в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$

*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків,
Україна*

E-mail: slavka.gs@yandex.ru, gefter@karazin.ua, elektroprom2012@ukr.net

Нехай b – фіксоване ціле число, $\mathbb{Z}[[x]]$ – кільце формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами і $f \in \mathbb{Z}[[x]]$. Розглянемо наступне функціональне рівняння

$$b \frac{y(x) - y(0)}{x} + f(x) = y(x). \quad (1)$$

Ліва частина цього рівняння містить оператор Помм'є

$$\Delta(y)(x) = \frac{y(x) - y(0)}{x}$$

(див., наприклад, [1]), що є коректно визначеним у $\mathbb{Z}[[x]]$. Якщо $b = 1$, тоді, як легко бачити, для будь-якого $y_0 \in \mathbb{Z}$ початкова задача

$$\begin{cases} b \frac{y(x) - y(0)}{x} + f(x) = y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

має наступний єдиний розв'язок, що належить $\mathbb{Z}[[x]]$:

$$y(x) = \frac{y_0 - xf(x)}{1 - x} = (y_0 - xf(x))(1 + x + x^2 + \dots).$$

У роботі для довільного цілого $b \neq \pm 1$ знайдено критерій існування розв'язку початкової задачі (2) з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ та отримано явну формулу для єдиного розв'язку рівняння (1), що належить $\mathbb{Z}[[x]]$.

[1] Нагнибіда М.І., *Оператори Помм'є в просторі аналітичних у крузі функцій*, Ін-т матем. НАН України, Київ, 1997.