Андрій Бомба, Ігор Присяжнюк, Олена Присяжнюк

Обернені сингулярно збурені задачі конвективної дифузії в біпористих середовищах

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна
E-mail: abomba@ukr.net

Розглядається математична модель процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійно-адсорбційного масоперенесення розчинних речовин в мікропористому середовищі за умови невідомого коефіцієнта впливу внутрішньочастинкового перенесення на міжчастинкове:

$$\sigma \frac{\partial C_j}{\partial t} = \varepsilon D_j \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} - v(x) \frac{\partial C_j}{\partial x} - \varepsilon d_j(x) \left(\frac{\partial U_j}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}, \tag{1}$$

$$\sigma^* \frac{\partial U_j}{\partial t} = \varepsilon D_j^* \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_j}{\partial r} \right), \tag{2}$$

$$C_j\left(x,t\right)\big|_{t=0} = C_{j\,0}^{\,0}(x),\ \frac{\partial C_j(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0,\ \frac{\partial U_j(x,r,t)}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \tag{3}$$

$$U_j\left(x,r,t\right)\big|_{t=0} = U_{j\,0}^{\,0}(x,r),\ U_j\left(x,r,t\right)\big|_{r=R} = k_j C_j\left(x,t\right), \tag{4}$$

$$C_j(x,t^*) - C_{j*}^*(x,t^*) = \varepsilon h_j(x), \tag{5}$$

де $C_j\left(x,t\right)$ - концентрація j-ї компоненти забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі, $U_j\left(x,r,t\right)$ - концентрація забруднюючої речовини в мікрочастинках (на сферах з центром в точці x радіуса r, $0 \leqslant r \leqslant R$), σ та σ^* - коефіцієнти пористості міжчастинкового та внутрішньочастинкового просторів відповідно, D_j та D_j^* - коефіцієнти дифузії відповідно в міжчастинковому просторі та в порах частинок, $d_j(x)$ - шукана функція впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий, $v(x)$ - швидкість конвективного перенесення в міжчастинковому просторі, ε - малий параметр [2], l - довжина мікропористого середовища (фільтра), R - радіус частинок, k_j - константа адсорбційної рівноваги [1], $C_{j*}^*\left(x,t\right)$ - концентрація розчинної речовини у фільтраційній течії у точці з координатою x в момент часу t^* за умови відсутності адсорбції ($d_j(x) = 0$), $\varepsilon h_j(x)$ - зміна концентрації в кінці модельного часу, $h_j(x)$ - відома функція координат фізичної області. Вважаємо, що всі функції, які фігурують в умовах (3)-(5) є достатньо гладкими та узгодженими між собою в кутових точках відповідної області, а також на поверхнях частинок.

Розв'язок задачі (1)-(5) одержано у вигляді асимптотичних рядів:

$$C_j(x,t)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i C_{j,i}(x,t)+\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i \Pi_{j,i}(\xi,t)+R^1_{j,n}(x,t,\varepsilon), \tag{6}$$

$$d_j(x)=d_{j,0}(x)+\varepsilon d_{j,1}(x)+...+\varepsilon^n d_{j,n}(x)+R^2_{j,n}(x,\varepsilon), \tag{7}$$

$$U_j(x,r,t)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i U_{j,i}(x,r,t)+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}F_{j,i/2}(x,\rho,t)+R^3_{j,n}(x,r,t,\varepsilon), \tag{8}$$

де $C_{j,i}\left(x,t\right)$, $U_{j,i}\left(x,r,t\right)$, $d_{j,i}\left(x\right)$ $(j=\overline{1,m},\ i=\overline{0,n}\ )$ - члени відповідних регулярних частин асимптотики, $\Pi_{j,i}(\xi,t)$ $(\ i=\overline{0,n+1}\ )$ та $F_{j,i/2}(x,\rho,t)$ $(i=\overline{0,2n+1}\ )$ - функції типу примежового шару в околах $x=l$ та $r=R$ відповідно, $R^1_{j,n}(x,t,\varepsilon)$, $R^2_{j,n}(x,\varepsilon)$, $R^3_{j,n}(x,r,t,\varepsilon)$ - залишкові члени.

Після підстановки (6)-(8) в (1)-(5) та прирівняння коефіцієнтів при однакових степенях ε [2] отримано задачі для знаходження регулярних частин асимптотики $C_{j,i}\left(x,t\right)$ та $U_{j,i}\left(x,r,t\right)$. Для знаходження $d_{j,i}(x)$ отримано інтегральні рівняння:

$$\int\limits_0^x \frac{-d_{j,i}(\tilde{x})(U_{j,i})'_r(\tilde{x},R,t^*-\sigma f(x)+\sigma f(\tilde{x}))}{v(\tilde{x})}d\tilde{x}=\omega_{j,i}(x),\ t^*\geqslant\sigma f(x),$$

де $f\left(x\right)=\int\limits_0^x\frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$, $\omega_{j,0}(x)=h_j(x)$, $\omega_{j,i}(x)=0$ $(i=\overline{1,n})$. Поправки $\Pi_{j,i}(\xi,t)$ та $F_{j,i/2}(x,\rho,t)$ знаходяться аналогічно до [2].

У перспективі - дослідження такого роду нелінійних процесів у багатошарових середовищах, а також урахування терморежиму.

[1] Sergienko I.V., Peryk M.R., Leclerk S., Fraissard J., *High productivity methods of identification of competitive diffusion parameters in heterogeneous media of nanoporous particles*, Cybernetics and Systems Analysis **51 (4)**, (2015), cc. 529-546.

[2] Бомба А.Я., Присяжнюк О.В., *Моделирование нелинейных сингулярно возмущенных процессов двухкомпонентного конвективно-диффузионного массопереноса в нанопористой среде*, Электронное моделирование **№ 4 (37)**, (2015), cc. 37-52.