Ярослав Баранецький, Петро Каленюк

Нелокальна задача з умовами типу Самарського-Іонкіна для диференціально-операторних рівнянь другого порядку з інволюцією

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
E-mail: baryarom@ukr.net, pkalenyuk@gmail.com

Нехай H – гільбертовий простір, $L(H)$ – множина лінійних, неперервних операторів $H \to H$, $A : H \to H$ – необмежений самоспряжений оператор з дискретним спектром $\sigma_p(A) = \{z_k \in \mathbf{R} : z_k \sim \beta k^\alpha$ $\alpha, \beta > 0, k = 1, 2, ...\}$, $H_1 \equiv L_2((0,1), H)$, D – сильна похідна в H_1, $H(A^s) = \{v \in H : A^s v \in H\}$, $s \geq 0$, $B \in L(H)$, $BAg = ABg$, $g \in D(A)$. $H_2 \equiv \left\{y(x) \in H_1 : D^2 y \in H_1, A^2 y \in H_1\right\}$.

Розглядаємо задачу

$$L(D, A)\, y \equiv -D^2 y(x) + A^2 y + 2B(Dy(x) + Dy(1-x)) = f(x), \quad (1)$$

$$l_1 y = Dy(0) - Dy(1) - B(Dy(0) + Dy(1)) = h_1,\ y(0) - y(1) = h_2, \quad (2)$$

$$f(x) \in H_1, h_1 \in H_3 = H\left(A^{\frac{1}{2}}\right), h_2 \in H_4 = H\left(A^{\frac{3}{2}}\right).$$

Нехай $L : H_1 \to H_1$ оператор задачі (1), (2), $Ly \equiv L(D, A)\, y$, $y \in D(L)$, $D(L) \equiv \{y \in H_2 y = 0\}$, L_0 – оператор задачі (1), (2) у випадку $B = 0$, L_1 оператор нелокальної задачі

$$-D^2 y + A^2 y = f, Dy(0) - Dy(1) - B(Dy(0) + Dy(1)) = 0,\ y(0) - y(1) = 0.$$

Два оператори $H_1 \to H_1$ називаються майже подібними, якщо їхні власні значення співпадають, а системи кореневих функцій цих операторів є базисами Рісса.

Теорема 1. *Оператори $L, L_0, L_1 : H_1 \to H_1$ майже подібні. Система кореневих функцій оператора L_1 є системою власних функцій оператора L.*

Теорема 2. *Для будь-яких $f \in H_1$, $h_1 \in H_3$, $h_2 \in H_4$ існує единий розв'язок задачі* (1), (2).