

Завдання дистанційного туру олімпіади з математики у 2020 році
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(повне та правильне розв'язання кожної задачі оцінюватиметься у 10 балів)

1. Спростити вираз

$$\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{a^2-b^2}\right)\left(a - \frac{ab+b^2}{a+b}\right).$$

2. Скільки коренів рівняння

$$\sin^2 3x + \sin^2 5x = 1 \text{ належить проміжку } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]?$$

3. Метали A і B містяться в одному сплаві відповідно у відношенні 1:2, а в другому – відповідно у відношенні 2:3. Скільки кілограмів першого сплаву треба взяти на один кілограм другого, щоб після сплавлення цих сплавів у один, новий сплав містив метали A і B у відношенні 6:11?

4. Знайти таке трицифрове число \overline{xyz} , при якому чотирицифрові числа $\overline{xyz1}$ та $\overline{2xyz}$ задовольняють рівняння $\overline{xyz1} = 3 \cdot \overline{2xyz}$.

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$$

6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 200 \cdot 5^x = 2^y. \end{cases}$$

7. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(3; 0)$ та $B(0; 3)$, а третя точка $C(x; y)$ лежить на прямій $y=x$. Площа трикутника дорівнює 9 кв. од. Визначити координати точки C .

8. У прямокутну трапецію з периметром p вписано коло. Знайти радіус цього кола, якщо гострий кут трапеції дорівнює α .

9. Для стимулювання працівників компанія пропонує кожен місяць збільшення заробітної плати збільшувати на 2% або в останній місяць року премію 50% місячного заробітку. Який варіант вигідніший для працівників?

10. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\pi(7-4\sqrt{3})}}$ см,

а бічне ребро нахилене до основи під кутом 75° . Знайти площу поверхні сфери, описаної навколо даної піраміди.